

# 4次対称群のハッセ図を立体で捉え、置換を表すあみだくじの個数を数える

**Consider a symmetric group  $S_4$  Hasse diagram as a truncated octahedron,  
and count the number of ladder lotteries of an arbitrary permutation**

広尾学園高等学校 医進・サイエンスコース 2年 石川宙 小室沙和 柳澤美沙

## Abstract:

In the previous research, writing down all the ladder lotteries of an arbitrary permutation was the standard method for counting, which requires time and effort. The purpose of our study is to find a simpler method to count the number of ladder lotteries with the least bars of an arbitrary permutation.

**Keywords:** Ladder lottery, Hasse diagram, Symmetric group  $S_4$ , Truncated octahedron

## 1. 研究背景

一つの置換に対してその置換を表すようなあみだくじは無限個存在するが、横線の本数を最小としたときその数は有限個となる。この数を数えるために、あみだくじを置換ごとにすべてかき出す方法が先行研究で見つかっている (Yamanaka,2010)[1]。この方法を用いれば、あみだくじを過不足なくかき出すことができる。しかし、この方法では、それぞれの置換ごとにあみだくじを最初からすべてかき出す必要があり、手間がかかるうえ、抜けや重複などの人為的なミスが発生する可能性も高い。

## 2. 研究目的・意義

本研究では、あみだくじを置換ごとに全てかき出すのではなく、より手間が少なくミスが起こりにくくするに、任意の置換を表すあみだくじの個数を統一的に数える方法を見つけることを目的として研究を行い、4次対称群の置換についてその方法を見つけた。

## 3. 研究方法

4次対称群の隣接互換による順序から得られるハッセ図(図1)を図2の切頂八面体という立体图形で捉えることができる[2](Hersh,2016)[3]。辺に隣り合う数字の交換である隣接互換、24個の頂点それぞれに4次対称群の置換を当てはめる。切頂八面体を下から上へたどる時、置換の転倒数が1増えるように置換を配置し転倒数が最大である4321を上、最小である1234を下として图形を見る。1234から目的の置換までをたどると、たどった隣接互換の順にあみだくじに横線を足していくことで目的の置換を表すあみだくじがかかる。また、置換まで最短距離でたどることで、横線が最小本数のあみだくじをすべて得られる。

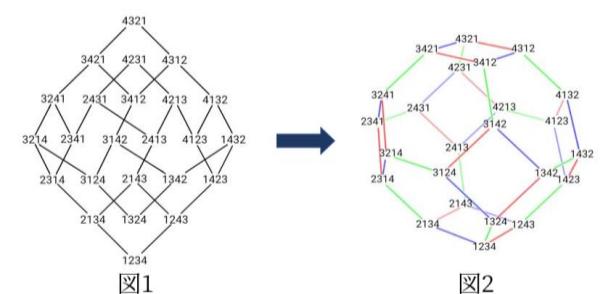


図2

## 4. 結果・考察

切頂八面体上では、それぞれの辺が隣接互換を表しており、またあみだくじの横線も隣接互換を表しているため、任意の置換までたどった時に異なるたどり方で違う形のあみだくじがかけることがあった。しかし、異なる

たどり方でかけるあみだくじが全て違う形だとは限らず、たどり方は異なるがかけるあみだくじの形は同じである場合があった。その原因としては切頂八面体の正方形の面上の辺が関係している。

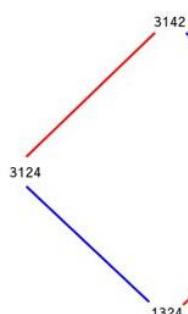


図3

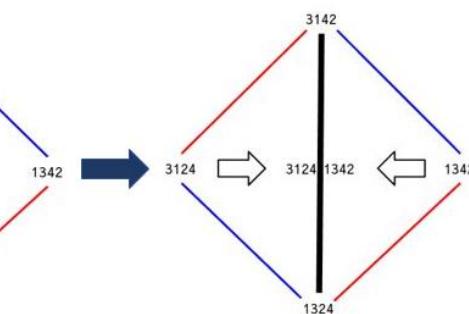


図4

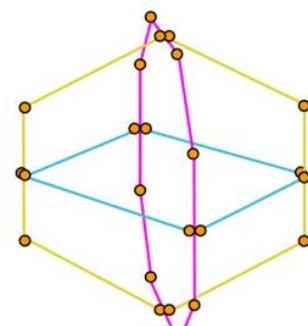


図5

図3は切頂八面体のある面を切り取ったものである。青い辺は1番目と2番目の数字の交換であり、赤い辺は3番目と4番目の交換を表す。この部分を下の置換から上の置換までたどる時、左側からたどる方法と右側からたどる方法の2通りある。これをあみだくじでくと、2本かかれる横線が離れていて互いに作用しないため、正方形の左右どちらをたどった場合でも同じあみだくじがかける。切頂八面体の正方形はすべて、同様のことが言える。その重複を無くすように、図4のように正方形の左右の置換をくっつけ正方形を1本の直線に書き換えた新図(図5)を考えたことにより、任意の置換までの新図のたどり方と、その置換を表す形の違うあみだくじの個数が一致し、あみだくじの個数を簡単に知ることができたと考えられる。

## 5. 結論及び今後の展望

本研究では、4次対称群のハッセ図を切頂八面体としてとらえ、任意の置換までたどることでその置換を表すあみだくじをかけた。また、その切頂八面体を変形させた図形を考えた時、任意の置換までのたどり方の数がその置換を表すあみだくじの個数と一致し、あみだくじの個数を簡単に数えられた。

今回、4次対称群のみについて考えたが、5次対称群、6次対称群など、数字やあみだくじの縦線が増えた場合についても、同様にハッセ図を立体として捉えることで、置換を表すあみだくじの個数を数えることができるのか、もしくは他の方法があるのか探っていきたい。

また、今回2つの立体を作り、それぞれ、置換を表すあみだくじをかくことができる立体と、そのあみだくじの個数を知ることができる立体であったが、1つの立体でこの2つを知ることができる形はあるのか、探っていきたい。

## 参考文献・引用文献

- [1]Katsuhisa Yamanaka et al.,(2010),Efficient enumeration of all ladder lotteries and its application,Theoretical Computer Science 411, 1714–1722
- [2]小林雅人, バイグラスマニア探求課題集 2019 広尾学園用
- [3]Patricia Hersh et al.,(2016),The Mathematical Legacy of Richard P. Stanley, Amer Mathematical Society